

Zur axial gedrückten Kreiszyinderschale

Pflüger, Alf

Veröffentlicht in:
Abhandlungen der Braunschweigischen
Wissenschaftlichen Gesellschaft Band 14, 1962,
S.91-108



Friedr. Vieweg & Sohn, Braunschweig

Zur axial gedrückten Kreiszyllinderschale

Von Alf Pflüger, Hannover

Eingegangen am 17. 10. 62

Übersicht: Auf Grund einer Hypothese über die erforderlichen Störverschiebungen gelingt es, neue Erkenntnisse über das Verhalten der axial gedrückten Kreiszyllinderschale zu gewinnen. Für die Beulform, die Beulenzahl und die Durchschlagslast ergibt sich erstmals eine befriedigende Übereinstimmung zwischen Rechnungs- und Versuchsergebnissen.

Summary: On the basis of a hypothesis about the influence of disturbances it is possible to obtain new results concerning the post-buckling behavior of the axially compressed circular cylindrical shell. The ensuing form and number of the buckle waves, and the snapthrough load show satisfactory agreement with test results.

1. Einleitung

Wird nach Abb. 1 eine Kreiszyllinderschale in axialer Richtung auf Druck beansprucht, so kann sie bei entsprechend hoher Belastung ausbeulen. Für eine praktisch brauchbare Beschreibung des Vorgangs genügt es jedoch nicht, die niedrigste Verzweigungslast auszurechnen, bei der von der Lösung für eine nur in ihrer Mittelfläche zusammengedrückte Schale eine Lösung für die ausgebeulte Schale abzweigt. Es stellt sich vielmehr heraus, daß auch schon unterhalb der Verzweigungslast Gleichgewichtszustände des ausgebeulten Systems existieren, in die bei den in der Praxis vorkommenden Störungen die Schale durchschlagen kann. Obwohl diese Vorgänge schon häufig untersucht wurden und der grundsätzliche mechanische Zusammenhang seit langem geklärt ist *), sind doch noch einige wichtige Teilfragen offen geblieben:

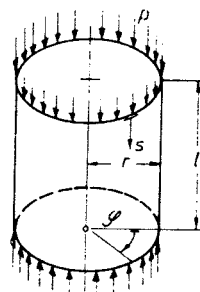


Abb. 1. Axial belastete Kreiszyllinderschale

Erstens ist es bisher nicht gelungen, die Beulform in hinreichender Übereinstimmung mit Versuchsergebnissen auszurechnen. Im Versuch zeigen sich rautenförmig angeordnete „quadratische“ Beulen, deren Ausdehnung in Längs- und Umfangsrichtung des Zylinders ungefähr gleich groß ist. Die Theorie liefert dagegen Beulen, die in Längsrichtung stark gestreckt sind und das Rautennetz kaum erkennen lassen.

*) Von der umfangreichen Literatur über dieses Problem seien hier nur die beiden grundlegenden Arbeiten [1] und [2] und der zusammenfassende Abschnitt in dem Buch [3] angeführt.

Zweitens ist die Frage der sich einstellenden Beulenzahl noch nicht befriedigend beantwortet.

Drittens ist die Höhe der Durchschlagslast so stark von dem jeweils verwendeten Rechnungsansatz abhängig, daß auch hier noch eine Klärung wünschenswert ist.

Die folgenden Ausführungen versuchen, diese drei Teilprobleme zu lösen. Der Lösungsweg ist — wenigstens im Anfang — nicht neu; die Ergebnisse werden im wesentlichen durch Aufdeckung bisher nicht beachteter Zusammenhänge unter Verwendung einer neuen Hypothese über den Durchschlageffekt gewonnen. Dabei wird rein elastisches, homogenes und isotropes Material vorausgesetzt.

2. Bezeichnungen

Es seien zunächst folgende Bezeichnungen eingeführt (vgl. Abb. 1):

l, r, t Länge, Radius und Wandstärke der Schale,

$$\beta = \frac{t^2}{12 r^2},$$

s, φ Koordinate eines Punktes der unverformten Mittelfläche nach Abb. 1,

$$x = \frac{s}{r}, \quad \frac{\partial (\dots)}{\partial x} = (\dots)', \quad \frac{\partial (\dots)}{\partial \varphi} = (\dots)'' ,$$

u, v Verschiebungen eines Punktes der Mittelfläche in s - bzw. $r\varphi$ -Richtung,

w Verschiebung der Mittelfläche in Richtung der Schalennormalen, positiv nach innen gemessen,

p Belastung je Längeneinheit des Schalenumfangs,

p_0 beliebige Verzweigungslast,

p_K niedrigste (kritische) Verzweigungslast,

p_{KD}, p'_{KD} kritische Last bei endlichen Störungen (Durchschlagslast) bei Gewichtsbelastung bzw. Belastung mit einer Prüfmaschine.

Die Indizes 0 und K werden auch bei anderen Größen zur Kennzeichnung der Verzweigungspunkte benutzt.

E, μ Elastizitätsmodul und Querkontraktionszahl,

$$p^* = \frac{p}{t} \frac{1 - \mu^2}{E},$$

f mittlere Längszusammendrückung der Schale,

w_m maximale Beulordinate,

w_{st}, w_v Störverschiebung bzw. Vorverformung,

m Anzahl der Beulhalbwellen über die Zylinderlänge,

n Anzahl der Beulvollwellen über den Zylinderumfang,

$$\lambda = m \frac{\pi r}{l}, \quad \nu = \frac{n^2}{\lambda^2}, \quad \zeta = \frac{\lambda^2}{\lambda_K^2},$$

N_x, N_y, T Streckenlängskräfte und Streckenschubkraft am Schalenelement,
 F Spannungsfunktion.

Einige weitere, weniger wichtige Bezeichnungen werden im Laufe der Rechnung bei ihrer Einführung erklärt.

3. Differentialgleichungen

Die grundlegenden Differentialgleichungen des Problems sind in der Literatur schon so oft abgeleitet worden, daß sie ohne Beweis angegeben seien. Sie können z. B. der Arbeit [2] entnommen werden und lauten mit den hier benutzten Bezeichnungen

$$\left. \begin{aligned} \Delta \Delta F &= -\frac{E t}{r^2} (r w'' + w'' w''' - w'^2), \\ \Delta \Delta w &= 12 \frac{1 - \mu^2}{E} \frac{r^2}{t^3} (r F'' + F'' w''' + F'' w'' - 2 F' w') \end{aligned} \right\} \quad (1)$$

Dabei ist die Spannungsfunktion F definiert durch

$$F'' = N_\varphi, \quad F'' = N_x, \quad F' = -T. \quad (2a, b, c)$$

Die Gln. (1), die im folgenden als *Donnellsche* Gleichungen bezeichnet seien*), enthalten verschiedene Vereinfachungen, so daß ihr Gültigkeitsbereich beschränkt ist. Dieser läßt sich am besten bei Betrachtung der aus (1) folgenden Verzweigungslasten charakterisieren, deren Berechnung als nächstes erfolgen möge.

4. Verzweigungslasten

Für den Grundzustand, d. h. den Zustand der nicht ausgebeulten Schale in den Verzweigungspunkten, gilt

$$\left. \begin{aligned} F_0'' = N_{\varphi 0} = 0, \quad F_0''' = N_{x0} = -p_0, \quad F_0' = -T_0 = 0, \\ w_0 = \text{const.} \end{aligned} \right\} \quad (3a-d)$$

womit (1) befriedigt wird. Werden die bei einer Variation des Kräfte- und Verformungszustandes auftretenden Zusatzgrößen durch einen Querstrich gekennzeichnet, so ergeben sich die Beugleichungen für die Verzweigungspunkte aus (1), wenn man dort

$$F = F_0 + \bar{F}, \quad w = w_0 + \bar{w}$$

setzt und von den Zusatzgrößen nur lineare Glieder beibehält, unter Beachtung von (3) zu

$$\Delta \Delta \bar{F} = -E \frac{t}{r} \bar{w}'', \quad \Delta \Delta \bar{w} = 12 \frac{1 - \mu^2}{E} \frac{r^2}{t^3} (r \bar{F}'' - p_0 \bar{w}''). \quad (4a, b)$$

*) Sie wurden nämlich in ihrem wesentlichen Teil zuerst von *L. H. Donnell* [4] angegeben. Die entsprechenden Gleichungen für die Platte großer Durchbiegungen finden sich allerdings schon bei *Th. v. Karman* [5].

Nach Elimination von \bar{F} folgt daraus

$$\Delta \Delta \Delta \bar{w} + 12 (1 - \mu^2) \frac{r^2}{t^2} \bar{w}'''' = - 12 \frac{1 - \mu^2}{E} \frac{r^2}{t^3} p_0 \Delta \Delta \bar{w}. \quad (5)$$

Diese lineare Beulgleichung, deren Eigenwerte die Verzweigungslasten liefern, hat die bekannte Lösung

$$\left. \begin{aligned} \bar{w} &= C \sin \lambda x \cos n \varphi \\ \text{mit } \lambda &= m \pi \frac{r}{l}, \quad m, n = 1, 2, 3 \dots \end{aligned} \right\} \quad (6)$$

Sie erfüllt die Randbedingungen gelenkig-unverschieblicher Schalenränder. Man erhält nach Einsetzen von (6) in (5) mit den Abkürzungen

$$p_0^* = \frac{p_0}{t} \frac{1 - \mu^2}{E}, \quad \beta = \frac{t^2}{12 r^2}$$

als Beulbedingung

$$p_0^* \lambda^2 (\lambda^2 + n^2)^2 = (1 - \mu^2) \lambda^4 + \beta (\lambda^2 + n^2)^4. \quad (7)$$

Für Gl (7) wird eine Genauigkeitsaussage möglich, da das exakte Ergebnis vorliegt. Nach [6] müßte nämlich (7) mit den hier benutzten Bezeichnungen lauten

$$p_0^* [\lambda^2 (\lambda^2 + n^2)^2 + \lambda^2 n^2] = \frac{(1 - \mu^2) \lambda^4}{\lambda^2 + n^2} + \beta \{ (\lambda^2 + n^2)^4 - 2 [\mu \lambda^6 + 3 \lambda^4 n^2] + (4 - \mu) \lambda^2 n^4 + n^6 \} + 2 (2 - \mu) \lambda^2 n^2 + n^4 \}. \quad (8)$$

Man erkennt, daß (7) aus (8) hervorgeht, wenn in (8) nur die unterstrichenen Glieder beibehalten werden. Da in ihnen gerade die höchsten Potenzen von λ und n vorkommen, wird die Näherung um so brauchbarer sein, je größer λ und n sind, d. h. je mehr Beulwellen sich in der Schale ausbilden. Umgekehrt wird man mit den *Donnell'schen* Vereinfachungen im allgemeinen keine Beulzustände mit wenigen Wellen berechnen können. Diese Erkenntnis gilt auch für die im folgenden zu verwendenden Grundgleichungen (1), da (7) aus (1) abgeleitet wurde.

Wenn die Rechnung doch nur für größere Wellenzahlen (also etwa $n \geq 5$) richtig ist, so muß es auch erlaubt sein, bei Bestimmung des niedrigsten Wertes von p_0 auf die Forderung der Ganzzahligkeit von n zu verzichten. Man kann also den aus (7) folgenden Ausdruck

$$p_0^* = (1 - \mu^2) \frac{\lambda^2}{(\lambda^2 + n^2)^2} + \beta \frac{(\lambda^2 + n^2)^2}{\lambda^2} \quad (9)$$

einfach nach n differenzieren und die Ableitung gleich Null setzen. Es ergibt sich so für den kritischen Punkt die Bedingung

$$\frac{\lambda_K^2}{(\lambda_K^2 + n_K^2)^2} = \sqrt{\frac{\beta}{1 - \mu^2}} \quad (10)$$

und damit aus (7) für den kleinsten, kritischen Eigenwert

$$p_K^* = 2 \sqrt{(1 - \mu^2) \beta} \quad (11a)$$

oder auch

$$p_K = \frac{E}{\sqrt[3]{3(1 - \mu^2)}} \frac{t^2}{r}. \quad (11b)$$

Dieses seit langem bekannte*) sehr einfache Resultat ist von der Zylinderlänge unabhängig. λ_K und n_K bleiben vorläufig unbestimmt, es besteht nur zwischen ihnen die Beziehung (10). Erst dann, wenn das „Wellenlängenverhältnis“

$\frac{n}{\lambda}$ (gleich $\frac{\text{Wellenlänge in Achsrichtung}}{\text{Wellenlänge in Umfangsrichtung}}$) gegeben ist, läßt sich z. B. ein zum

kritischen Punkt gehörendes λ_K ausrechnen. Mit der Abkürzung $\nu = \frac{n^2}{\lambda^2} = \frac{n_K^2}{\lambda_K^2}$ wird nämlich aus (10)

$$\lambda_K = \frac{1}{1 + \nu} \sqrt[4]{\frac{1 - \mu^2}{\beta}}.$$

Mit Hilfe dieser Beziehung und der weiteren Abkürzung $\zeta = \frac{\lambda^2}{\lambda_K^2}$ folgt übrigens aus (9) und (11a)

$$\frac{p_0^*}{p_K^*} = \frac{p_0}{p_K} = \frac{(1 + \zeta \nu)^2}{2 \zeta (1 + \nu)^2} + \frac{\zeta (1 + \nu)^2}{2 (1 + \zeta \nu)^2}, \quad (12)$$

eine Beziehung, die weiter unten gebraucht wird.

5. Lösung im überkritischen Bereich

5.1. Ansatz für die Durchbiegung

Ein Versuch, die nicht-linearen Gleichungen (1) exakt zu lösen, erscheint völlig hoffnungslos. Zur angenäherten Lösung wurde bei allen bisherigen Untersuchungen das *Ritzsche* Verfahren benutzt, dessen Verwendung hier sehr nahe liegt. Dabei ergibt sich jedoch die Schwierigkeit, daß man über den zu wählenden Ansatz von vornherein wenig aussagen kann, so daß leicht das Rechenergebnis durch die Rechenvoraussetzungen zu weit festgelegt wird. Die Willkür in der Ansatzwahl wird bis zu einem gewissen Grade vermieden, wenn man von der Lösung (6) der linearen Beultheorie, die sicherlich auch nach Überschreitung der Beulgrenze noch eine leidliche Näherung darstellt, ausgeht und sie nach der Methode der schrittweisen Näherung verbessert.

Nach (6) gilt im Augenblick des Ausbeulens

$$w = w_0 + \bar{w} = w_0 + C \sin \lambda x \cos n \varphi. \quad (13a)$$

Der zugehörige Spannungszustand ergibt sich aus (3a, b, c) und (4a):

$$F = F_0 + \bar{F} = K \sin \lambda x \cos n \varphi + K_1 \varphi^2. \quad (13b)$$

Dabei ist K eine von λ und n abhängige Konstante, die aus (4a) leicht berechnet werden kann, während $K_1 = -\frac{1}{2} p_0$ sein muß. Eine verbesserte Lösung für w ergibt sich nun, wenn man die erste Näherung (13) in die rechte Seite von (1b)

*) Es findet sich bereits 1914 bei *S. Timoschenko* [7].

einsetzt und durch Integration des Ausdrucks für $\Delta \Delta w$ ein neues w berechnet. Man erhält so

$$\begin{aligned}\Delta \Delta w &= 12 \frac{1 - \mu^2 r^2}{E} \frac{1}{r^3} [-r K \lambda^2 \sin \lambda x \cos n \varphi + 2 K C \lambda^2 n^2 (\sin^2 \lambda x \cos^2 n \varphi \\ &\quad - \cos^2 \lambda x \sin^2 n \varphi) - 2 K_1 C \lambda^2 \sin \lambda x \cos n \varphi] \\ &= -12 \frac{1 - \mu^2 r^2}{E} \frac{1}{r^3} \lambda^2 [(r K + 2 K_1 C) \sin \lambda x \cos n \varphi + K C n^2 (\cos 2 \lambda x - \cos 2 n \varphi)].\end{aligned}$$

Diese inhomogene Differentialgleichung hat eine durch die Störungsglieder bedingte Partikularlösung von der Form

$$\left. \begin{aligned}w &= a_0 + a_1 w_1 + a_2 w_2 + a_3 w_3 \\ \text{mit } w_1 &= \sin \lambda x \cos n \varphi, w_2 = \cos 2 \lambda x, w_3 = \cos 2 n \varphi.\end{aligned} \right\} \quad (14)$$

Dabei stellt a_0 eine konstante radiale Verschiebung dar, während die Konstanten a_1, a_2, a_3 gegebenenfalls aus der Differentialgleichung berechnet werden können. Hierauf und auf eine mögliche Fortsetzung der Methode der schrittweisen Näherung sei jedoch verzichtet. Vielmehr sei die Lösung dadurch weiter verbessert, daß (14) als Ansatz für das *Galerkinsche* Verfahren benutzt wird, wobei dann die Konstanten a die noch zu bestimmenden Freiwerte sind.

Bei diesem Ansatz *) erfüllen allerdings w_2 und w_3 die an den Zylinderrändern geforderten Randbedingungen nicht. Da jedoch oben festgestellt werden konnte, daß in dem hier nur betrachteten Bereich großer Wellenzahlen die Zylinderlänge und damit die an den Rändern herrschenden Lagerungsbedingungen für den Beulbeginn in den Verzweigungspunkten unwichtig sind, darf man hoffen, daß auch im überkritischen Gebiet die Randbedingungen keine Bedeutung haben. Diese Annahme liegt fast allen bisherigen Untersuchungen zugrunde**) und steht im Einklang mit Versuchsergebnissen, wenn man kurze Zylinder mit etwa $l < \pi r$ ausschließt. Eine grundsätzlich durchaus mögliche Anpassung des Ansatzes an die Randbedingungen durch Hinzunahme von Lösungen der homogenen Gleichung $\Delta \Delta w = 0$ würde die Rechenarbeit sehr vergrößern.

5.2. Durchführung des Galerkinschen Verfahrens

Das *Galerkinsche* Verfahren sei hier statt des *Ritzschen* gewählt, da hierfür nicht erst noch Energieausdrücke aufgestellt zu werden brauchen und auch sonst etwas an Rechenarbeit gespart wird. Weil w_2 und w_3 nicht nur die natürlichen, sondern auch die geometrischen Randbedingungen verletzen, besteht auch kein Grund, das *Ritzsche* Verfahren zu bevorzugen. Beide Methoden stellen hier eben nicht mehr die angenäherte Lösung eines Variationsproblems dar, sondern haben nur noch den Wert einer sinnvollen Mittelbildung.

Nach Wahl des Ansatzes für w ist noch die zugehörige Spannungsfunktion F zu bestimmen. Sie ergibt sich aus (1a), wenn dort w nach (14) eingesetzt wird. Es entsteht dann eine inhomogene Bipotentialgleichung, deren Partikularlösung, wie man leicht bestätigt, folgende Form hat:

*) Er wurde auch von *Kempner* [2] benutzt und dort ebenfalls durch schrittweise Näherung, jedoch in etwas anderer Weise gewonnen, wobei zwei weitere Konstanten auftreten, die dann willkürlich zu Null angenommen werden.

**) Eine Ausnahme bildet z. B. [8].

$$F = - \frac{E t}{r^2} \left[\frac{a_1 \lambda^2}{(\lambda^2 + n^2)^2} (2 a_3 n^2 - 2 a_2 n^2 - r) \sin \lambda x \cos n \varphi \right. \\ \left. - \frac{1}{4 \lambda^2} (a_2 r + \frac{1}{8} a_1^2 n^2) \cos 2 \lambda x + \frac{a_2^2 \lambda^2}{32 n^2} \cos 2 n \varphi \right. \\ \left. + \frac{2 a_1 a_3 \lambda^2 n^2}{(\lambda^2 + 9 n^2)^2} \sin \lambda \frac{s}{r} \cos 3 n \varphi \right. \\ \left. + \frac{2 a_1 a_3 \lambda^2 n^2}{(9 \lambda^2 + n^2)^2} \sin 3 \lambda \frac{s}{r} \cos n \varphi \right. \\ \left. + \frac{a_2 a_3 \lambda^2 n^2}{(\lambda^2 + n^2)^2} \cos 2 \lambda \frac{s}{r} \cos 2 n \varphi + \frac{p^* r^2}{2 (1 - \mu^2)} \varphi^2 \right]. \quad (15)$$

Wie es sein muß, folgt aus (15) für die axiale Belastung

$$\frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} -F \cdot d\varphi = p.$$

Die durchgeführte Ermittlung von F aus (1a) sorgt dafür, daß eine der beiden Differentialgleichungen des Problems exakt erfüllt ist. Zur angenäherten Befriedigung von (1b) wird nun die *Galerkinsche* Rechenvorschrift benutzt, die hier folgende Form annimmt

$$\int_0^t \int_0^{2\pi} \left[\Delta \Delta w - 12 \frac{1 - \mu^2}{E} \frac{r^2}{t^3} (r F'' + F'' w'' + F'' w'' - 2 F' w') \right] w_i d\varphi dx = 0 \quad (16)$$

mit $i = 1, 2, 3, \dots$

Dabei sind die w nach (14) und F nach (15) einzusetzen. Nach Ausführung der grundsätzlich einfachen und nur etwas umständlichen Integrationen, die hier übergangen werden können, lassen sich folgende Gleichungen gewinnen.

$$\frac{a_1^2 3}{t^2 8} \zeta (1 + \nu^2) (1 + \nu)^2 + 2 \nu (1 + \zeta \nu)^2 \left[\sqrt{\frac{3}{1 - \mu^2}} \left\{ \frac{a_2}{t} \left[2 - \frac{(1 - \nu)^2}{4} \right] 2 - \frac{a_3}{t} \right\} \right. \\ \left. + \left\{ \frac{a_2^2}{t^2} + \frac{a_3^2 [(1 + 9\nu)^2 + (1 + \nu)^2] (9 + \nu)^2}{t^2 [(9 + \nu)^2 + (1 + \nu)^2] (1 + 9\nu)^2} \right\} 24 \zeta \nu^2 (1 + \nu)^2 \left[\frac{1}{(1 - \nu)^2} - \frac{1}{(9 - \nu)^2} \right] \right. \\ \left. - \frac{a_2 a_3}{t} 48 \zeta \nu^2 + \frac{(1 + \nu)^2}{1 - \mu^2} (1 + \zeta \nu)^2 \frac{p_0 - p}{p_K} \right] = 0, \\ \frac{a_1^2}{t^2} \nu \left[\frac{3}{4} + \frac{6}{(1 + \nu)^2} \right] + \frac{a_2}{t} 8 \left[\sqrt{\frac{3}{1 - \mu^2}} \left[\frac{(1 - \zeta \nu)^2}{8 \zeta} - \frac{2 \zeta}{(1 - \zeta \nu)^2} - \frac{p}{p_K} \right] \right. \\ \left. - \frac{24 \zeta \nu^2}{(1 + \nu)^2 (1 + \zeta \nu)^2} \right] \left[\sqrt{3(1 - \mu^2)} \left\{ \frac{a_1^2 a_2}{t^2 t} \left[1 + \frac{(1 - \nu)^2}{(9 - \nu)^2} \right] + 4 \frac{a_2 a_3^2}{t t^2} - \frac{a_1^2 a_3}{t^2 t} \right\} \right. \\ \left. - \frac{a_3}{t} 8 \nu \right] \sqrt{\frac{3}{1 - \mu^2}} \\ \frac{a_1^2}{t^2} 3 \frac{(1 + \zeta \nu)^2}{\zeta (1 + \nu)^2} \left[1 + \frac{a_2}{t} \frac{4 \zeta \nu}{(1 - \zeta \nu)^2} \right] \sqrt{3(1 - \mu^2)} \left[- \frac{a_3}{t} 8 \nu \right] \sqrt{\frac{3}{1 - \mu^2}} \\ - \frac{a_3}{t} 12 \nu \left[\sqrt{3(1 - \mu^2)} \left\{ \frac{a_1^2}{t^2} \left[\frac{1}{(1 + 9\nu)^2} + \frac{1}{(1 + \nu)^2} \right] - \frac{a_2^2}{t^2} \frac{4}{(1 - \nu)^2} \right\} \right. \\ \left. - \frac{a_2}{t} 8 \nu \right] \sqrt{\frac{3}{1 - \mu^2}} = 0. \quad (17a, b, c)$$

p_0/p_K ist dabei Gl. (12) zu entnehmen. Die Gln. (17) haben den Vorteil, daß in ihnen die Steifigkeitszahl β nicht mehr vorkommt. Es sind im übrigen drei nicht-lineare Gleichungen für die Konstanten a_1, a_2, a_3 . Die Konstante a_0 von (14) ist darin nicht enthalten, da sie durch Differentiationsprozesse herausgefallen ist. Eine weitere *Galerkinsche* Gleichung mit $w_0 = 1$ liefert die triviale Aussage $0 = 0$, also auch keine Bedingung für a_0 . Diese Konstante ist trotzdem nicht willkürlich, sondern, wie folgt, zu berechnen.

5.3. Radialverschiebung a_0 , maximale Beulamplitude und mittlere Längszusammendrückung

Es seien zunächst die Dehnungen der in Längs- und Umfangsrichtung laufenden Fasern der Mittelfläche der Schale angegeben. Für sie gilt bei einer den Voraussetzungen der *Donnell'schen* Gleichungen (1) entsprechenden Beschränkung auf lineare Glieder der Verschiebungen u und v und quadratische in w

$$\left. \begin{aligned} \varepsilon_x &= \frac{u'}{r} + \frac{1}{2} \frac{w'^2}{r^2}, \\ \varepsilon_y &= \frac{1}{r} (v' - w) + \frac{1}{2} \frac{w'^2}{r^2}. \end{aligned} \right\} \quad (18a, b)$$

Diese Beziehungen seien hier auch wieder ohne Ableitung unter Hinweis auf die Literatur (vgl. z. B. [2]) angegeben. Zusammen mit dem für die Schnittgrößen N_x und N_y gültigen Elastizitätsgesetz

$$\varepsilon_x = \frac{1}{E t} (N_x - \mu N_y) = \frac{1}{E t} (F'' - \mu F''),$$

$$\varepsilon_y = \frac{1}{E t} (N_y - \mu N_x) = \frac{1}{E t} (F'' - \mu F'')$$

folgt aus (18)

$$\left. \begin{aligned} \frac{u'}{r} &= \frac{1}{E t} (F'' - \mu F'') - \frac{1}{2} \frac{w'^2}{r^2}, \\ \frac{v'}{r} &= \frac{1}{E t} (F'' - \mu F'') + \frac{w}{r} - \frac{1}{2} \frac{w'^2}{r^2}. \end{aligned} \right\} \quad (19a, b)$$

Die gesuchte Radialverschiebung a_0 ergibt sich nun aus der Forderung, daß v im Verlauf über φ in 2π periodisch sein muß. Es muß also

$$v_{\varphi=2\pi} - v_{\varphi=0} = \int_0^{2\pi} v' d\varphi = 0$$

sein. Führt man in diese Gleichung v nach (19b) ein, so ergibt sich unter Benutzung von (14) und (15) nach Ausrechnung des Integrals

$$\frac{a_0}{t} = - \frac{\mu}{\sqrt{3(1-\mu^2)}} \frac{p}{p_K} + \frac{2\zeta v}{(1+\zeta v)^2} \sqrt{3(1-\mu^2)} \left(\frac{1}{8} \frac{a_1^2}{t^2} + \frac{a_3^2}{t^2} \right). \quad (20)$$

Der erste Term auf der rechten Seite dieser Gleichung stellt dabei die Aufweitung des Zylinders dar, die schon im Grundzustand von der Längsbelastung über die Querdehnung erzeugt wird. Er hat also mit dem eigentlichen Beulvorgang nichts zu tun.

Wenn alle Konstanten a ermittelt sind, kann w berechnet werden. Insbesondere wird die maximale Beulordinate interessieren. Hierfür folgt aus (14)

$$\frac{w_m}{t} = \frac{a_0}{t} + \frac{\mu}{\sqrt{3(1-\mu^2)}} \frac{p}{p_K} + \frac{a_1}{t} - \frac{a_2}{t} + \frac{a_3}{t}, \quad (21)$$

wenn die Aufweitung des Zylinders im Grundzustand als nicht mit zum Beulvorgang gehörig fortgelassen wird.

Die noch nicht benutzte Gl. (19a) liefert ebenfalls eine wesentliche Aussage, da sie es erlaubt, die mittlere Längszusammendrückung f des Zylinders auszurechnen. Es ist nämlich

$$f = -(u_{s=0} - u_{s=l}) = -\frac{1}{2\pi} \int_0^l \int_0^{2\pi} \frac{u'}{r} d\varphi dx,$$

woraus mit (19a), (14) und (15)

$$\frac{f}{f_K} = \frac{p}{p_K} + \frac{6\zeta(1-\mu^2)}{(1+\zeta\nu)^2} \left(\frac{1}{8} \frac{a_1^2}{t^2} + \frac{a_2^2}{t^2} \right) \quad (22)$$

folgt, wenn als kritische Längszusammendrückung $f_K = \frac{p_K}{E t}$ eingeführt wird.

In den obigen Formeln sind die Parameter ν und ζ noch offen. Sie werden häufig zusammen mit den Konstanten a als Freiwerte aufgefaßt und dann mit dem Ritzschen Verfahren bestimmt. Hier sollen diese Größen jedoch nach anderen, mechanischen Gesichtspunkten festgelegt werden, wodurch sich neue Ergebnisse erzielen lassen.

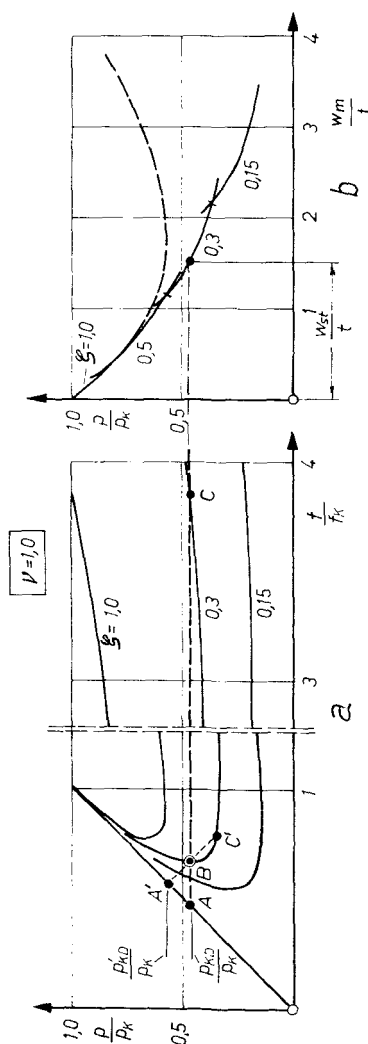
5.4. Zur Zahlenrechnung. Ergebnisse für $\nu = 1$

Zur numerischen Berechnung der Konstanten a_1, a_2, a_3 kann man folgendermaßen vorgehen. Da die Konstante a_3 in (17c) nur linear vorkommt, läßt sie sich mit Hilfe dieser Gleichung leicht als Funktion von a_1 und a_2 berechnen. Eingesetzt in (17a, b) folgen dann zwei Gleichungen, von denen jede sofort nach der ebenfalls nur linear vorkommenden Größe p/p_K aufgelöst werden kann. Faßt man dabei a_2 als unabhängige Veränderliche, a_1^2 als Parameter auf, so erhält man für jeden Wert von a_1^2 zwei Kurven, deren Schnittpunkt das zugehörige a_2 liefert.

Von den Ergebnissen dieser Rechnungen*) ist zunächst in den Abb. 2a, b die Abhängigkeit zwischen dem Belastungsverhältnis p/p_K und den Verformungsgrößen f/f_K bzw. w_m/t für einige willkürlich gewählte Werte des Parameters ζ aufgetragen. Dabei ist, ebenfalls willkürlich, $\nu = 1$ gesetzt.

Abb. 2a zeigt die im Prinzip bekannte Abhängigkeit zwischen Belastung und

*) Für ihre Durchführung auf einem elektronischen Rechenautomaten sowie weitere wertvolle Hilfe bei den umfangreichen sonstigen Rechnungen dieser Arbeit ist der Verfasser Herrn Dipl.-Ing. K. Dierks zu besonderem Dank verpflichtet.

Abb. 2a, b. Kraft-Verformungskurven für $\nu = 1$ mit ζ als Parameter; $\mu = 0,3$

Längszusammendrückung mit dem krassen Abfall der Tragfähigkeit nach Erreichung des Verzweigungspunktes. Die einzelnen Kurven $\zeta = \text{const}$ haben verschieden hohe Minima. Für sehr kleine ζ werden sogar Gleichgewichtszustände mit negativen p theoretisch möglich. Sie sind so zu erklären, daß zu den Ansatzfunktionen w_2 und w_3 eine periodisch veränderliche Randbelastung gehört, die zu einem Ausbeulen auch dann führen kann, wenn die Resultierende aller Randkräfte eine Zugkraft ist. Da dieser Effekt bei Randbelastungen auftritt, die praktisch nicht vorkommen, haben die Kurven für negative p keine Bedeutung. Die Gültigkeit des Diagramms dürfte spätestens bei $p/p_K = 0,1$ aufhören.

Aus Abb. 2b gehen die maximalen Beulamplituden hervor. Dabei ist lediglich die Kurve $\zeta = 1$ als Beispiel über einen größeren Bereich gezeichnet. Von den übrigen Kurven ist nur soviel eingetragen, wie notwendig ist, um die Einhüllende der Kurvenschar erkennen zu können. Die w_m/t , die zu den (labilen) Gleichgewichtszuständen der ausgebeulten Schale gehören, sind zahlenmäßig so gering, daß sie ohne weiteres erzeugt werden können. Diese zwar nicht mathematisch, aber doch mechanisch „kleinen“ Störampplituden können dann weit unterhalb der kritischen Last p_K das bekannte und gefährliche Durchschlagen verursachen.

5.5. Instabilitätskriterium

Es sei nun das folgende entscheidende Instabilitätskriterium bei endlichen Störungen als gültig postuliert: *Für den Übergang vom Grundzustand zum endlich benachbarten Zustand der ausgebeulten Schale ist die kleinste Störverformung w_m maßgeblich.* Sie sei im folgenden mit w_{st} bezeichnet.

Das Kriterium bedeutet, daß in Abb. 2a der Übergang von einem Punkte A des Grundzustandes zu einem Punkte B erfolgt, der auf einer ganz bestimmten ζ -Kurve liegt; und zwar muß es gerade der ζ -Wert sein, der bei der betreffenden Laststufe in Abb. 2b das kleinste w_m liefert.

Der Übergang findet allerdings nur dann von A nach B statt, wenn die Belastung konstant bleibt, wenn also z. B. Gewichtsbelastung vorliegt. Ein anderer Grenzfall wäre der, daß die Verformung f beim Durchschlagen konstant bleibt. Versuche mit Zylinderschalen werden häufig mit einer hydraulisch angetriebenen Prüfmaschine oder einer Maschine ähnlichen elastischen Verhaltens durchgeführt, bei der weder der eine, noch der andere der beiden Grenzfälle vorliegt. Die dazwischen liegende Mitte, d. h. der Übergang auf einer unter 45° verlaufenden Geraden vom Punkt A' nach B , dürfte eine bei vielen Prüfmaschinen brauchbare Annahme darstellen. Sie konnte in einem Fall auch durch Messung bestätigt werden, s. [3], S. 341. Die zugehörige Durchschlagslast sei p'_{KD} .

Da im Punkte B das Gleichgewicht labil ist, wird sich nach Erreichen dieses Punktes der eigentliche Durchschlageffekt noch anschließen. Stellt man die naheliegende und mit Versuchen im Einklang stehende Hypothese auf, daß sich beim Durchschlagen die einmal angenommenen Beulenzahlen in beiden Richtungen, und damit ν und ζ nicht mehr ändern, so muß bei Gewichtsbelastung der Punkt C , bei Belastung mit einer Prüfmaschine der Punkt C' in Abb. 2a im Endzustand erreicht werden. Die Einzelheiten des mit Massenwirkungen verbundenen Durchschlagsvorgangs können natürlich mit statischer Betrachtungsweise nicht berechnet werden.

5.6. Maßgebliche Werte von ν und ζ

Bisher wurde willkürlich $\nu = 1$ gesetzt; es ist also noch die Abhängigkeit vom Parameter ν zu untersuchen. In Abb. 3 sind hierzu die Einhüllenden entsprechend Abb. 2b, jedoch nun auch für andere Werte als $\nu = 1$ gezeichnet. Es ergibt sich, daß auch unter Beachtung dieser Möglichkeit zu einem festen Wert von p/p_K ein kleinster Wert von w_{St}/t gehört, der sich bei einem bestimmten ν (und ζ) einstellt.

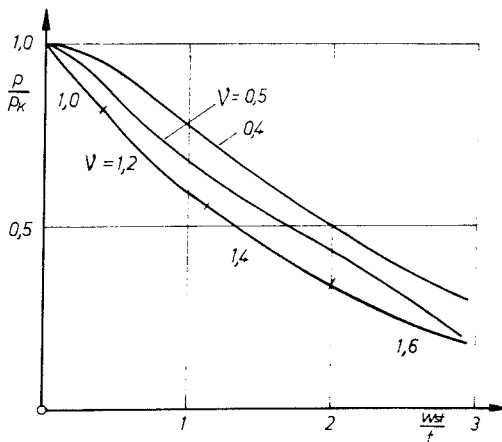
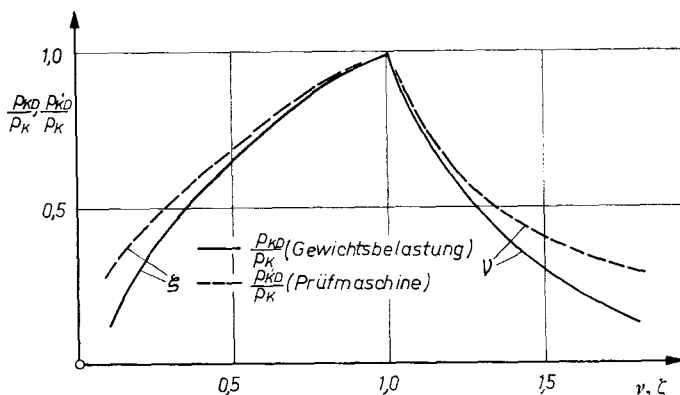


Abb. 3. Abhängigkeit zwischen Belastung und erforderlicher Störverschiebung für verschiedene ν mit $\mu = 0.3$

Abb. 4. Maßgebliche Werte von ν und ζ bei $\mu = 0,3$

Es lassen sich so die maßgeblichen Werte von ν und ζ ermitteln, die in Abb. 4 aufgetragen sind. Der Unterschied zwischen einer Belastung durch Gewichte oder durch eine Prüfmaschine ist dabei nicht groß. Die Kurven beginnen bei $p/p_K = 1$ mit dem Wert eins*). Für kleinere Lasten steigt ν an, zahlenmäßig aber doch nur verhältnismäßig wenig. Da zur Berechnung des Wellenlängenverhältnisses $n/\lambda = \sqrt{\nu}$ noch die Wurzel gezogen werden muß, bleibt dieses im ganzen Bereich von der Größenordnung der Einheit. Für die Beulfigur läßt sich schon hieraus schließen, daß ihre Ausdehnung in Längs- und Umfangsrichtung ungefähr gleich groß sein muß. ζ ändert sich mit sinkender Last etwas stärker als ν . Für $p/p_K = 0,4$ ist z. B. $\zeta = 0,27$, $\sqrt{\zeta} = 0,52$, d. h. es treten beim Durchschlagen nur rund 50 % der Beulen auf, die sich im Verzweigungspunkt nach der klassischen Stabilitätstheorie einstellen würden. Die Beulenzahlen selbst können bei Kenntnis von ν und ζ leicht ausgerechnet werden. Für das Quadrat der Anzahl der Wellen in Umfangsrichtung wird unter Beachtung von (10)

$$n^2 = \lambda^2 \nu = \frac{\nu \zeta}{(1 + \nu)^2} \sqrt{\frac{1 - \mu^2}{\beta}}. \quad (23)$$

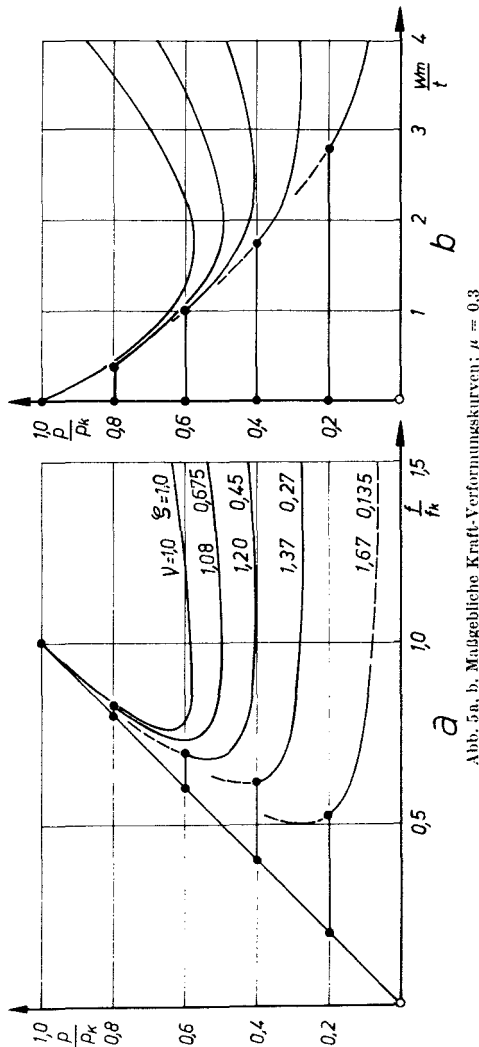
Die mit den Kurven von Abb. 3 aus (23) folgenden Beulenzahlen stimmen mit Versuchsergebnissen gut überein**), so daß eine der drei in der Einleitung gestellten Fragen als beantwortet gelten kann.

5.7. Maßgebliche Kraft-Verformungskurven. Beulfigur

Nach den gewonnenen Erkenntnissen läßt sich für eine beliebige Laststufe die maßgebliche Kraft-Verformungskurve angeben. In Abb. 5 sind diese Kurven für einige Werte von p/p_K dargestellt, wobei wegen der beschränkten Gültigkeit der Lösungen ein Teil der untersten Kurve nur gestrichelt angedeutet ist.

*) Eine nähere Untersuchung der Zusammenhänge in der Nähe des Verzweigungspunktes findet sich in der demnächst erscheinenden 2. Auflage des Buches [8].

**) Eine Arbeit, die eine ausführliche Gegenüberstellung von Versuchsergebnissen mit der hier entwickelten Theorie bringt, befindet sich in Vorbereitung.

Abb. 5a, b. Maßgebliche Kraft-Verformungskurven; $\mu = 0,3$

Auf Grund von Abb. 5 wird es nun auch möglich, für irgendeine Durchschlagslast die Beulfigur zu ermitteln. Als Beispiel sei bei Belastung mit einer Prüfmaschine für die Laststufe $p_{KD}/p_K = 0,4$, $p'_{KD}/p_K = 0,505$ die zum Punkt C' (vgl. Abb. 2a) gehörige Beulfigur angegeben. Für sie gilt

$$\nu = 1,37, \zeta = 0,27,$$

$$\frac{a_0}{t} = 0,2012, \frac{a_1}{t} = 1,5375, \frac{a_2}{t} = -0,4165, \frac{a_3}{t} = 0,1142.$$

Unter Beachtung des Ansatzes (14) läßt sich damit die Beulordinate für jeden Punkt der Schale ausrechnen und etwa im Schichtlinienplan darstellen. Das

Resultat zeigt Abb. 6. Man erkennt, daß die schachbrettartige Beulform der klassischen Stabilitätstheorie in eine rautenförmige übergegangen ist. Die Beulen bilden sich dabei nach innen aus, während die nach außen gehenden Verschiebungen die Rippen eines fast quadratischen Rautennetzes markieren. Genau genommen sind es keine Rauten, sondern Sechsecke mit vier langen und zwei kurzen Seiten, wie es besonders durch die Kammlinien (Wasserscheiden) in Abb. 6 verdeutlicht wird. Durch die kurzen Zwischenrippen wirkt das Netz in Zylinderlängsrichtung leicht gestreckt. Die Beulen erscheinen dagegen etwas zusammengedrückt.

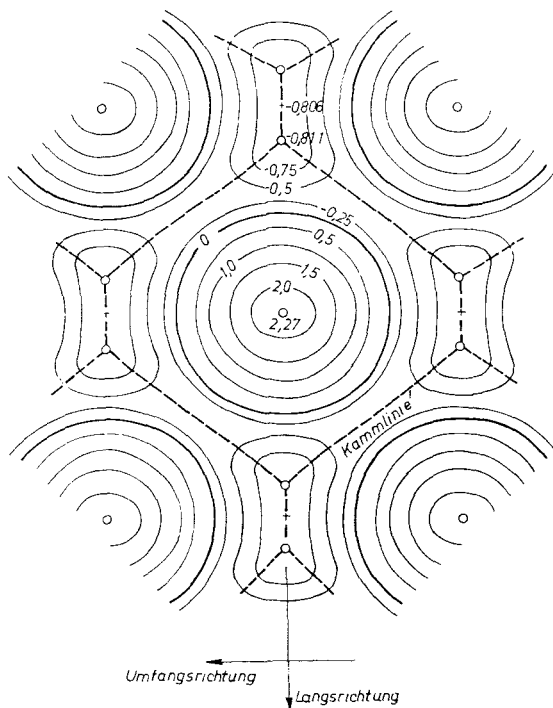


Abb. 6. Beulform im Endzustand nach dem Durchschlagen für $p'_{KD}/p_K = 0,505$; $\mu = 0,3$

Die so gewonnene Beulform gibt die von Versuchen her bekannten Bilder gut wieder, so daß auch in dieser Hinsicht die Theorie als befriedigend bezeichnet werden kann. Beim Vergleich ist zu bedenken, daß die Theorie nur im elastischen Bereich gilt. Wird in den Rippen die Fließgrenze überschritten, so kommt das Netz noch krasser zum Ausdruck.

5.8. Durchschlagslast

Die vorstehenden Betrachtungen geben noch keine Auskunft über die praktisch wichtigste Frage nach der für eine Bemessung maßgeblichen Höhe der Durchschlagslast. Diese läßt sich zwar nach Abb. 3 oder 5b in Abhängigkeit von w_{st}

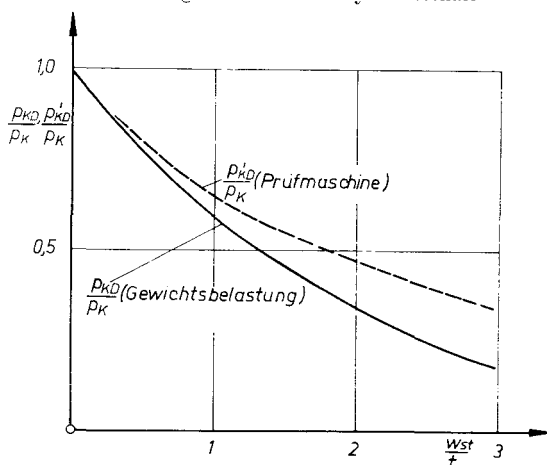


Abb. 7. Abhängigkeit zwischen Durchschlagslast und erforderlicher Störverschiebung; $\mu = 0,3$

darstellen, wie es Abb. 7 zeigt; es fehlt aber noch eine Angabe darüber, in welcher Höhe w_{st} praktisch auftritt. Es ist üblich und sinnvoll, hierzu von Vorverformungen der unbelasteten Schale auszugehen, die durch die Belastung p soweit elastisch vergrößert werden, bis die zum Durchschlagen erforderliche Störverschiebung erreicht ist. Die Vorverformung sei mit w_V bezeichnet. Es sei zuerst geklärt, wie sie sich bei einer Belastung verstärkt.

Hierfür sei es hinreichend, die sog. Theorie zweiter Ordnung anzuwenden, die hier durch die Differentialgleichung

$$\Delta \Delta \Delta \Delta w + 12(1 - \mu^2) \frac{r^2}{t^2} w'''' = -p \cdot 12 \frac{1 - \mu^2}{E} \frac{r^2}{t^3} \Delta \Delta (w_V + w)'' \quad (24)$$

dargestellt wird. Diese ergibt sich aus der linearisierten Beulgleichung (5), wenn dort die Zusatzverschiebung \bar{w} durch die Gesamtverschiebung w ersetzt wird und in dem Glied $-pw''$, das den Einfluß der Längsbelastung auf das Kräftegleichgewicht am Element erfaßt, die Vorverformung berücksichtigt und $-p(w_V + w)''$ geschrieben wird. In den übrigen Gliedern taucht w_V nicht auf, da es sich hierbei um die Reaktionskräfte handelt, die nur durch elastische Verformungen geweckt werden.

Als nächstes ist eine passende Annahme über den Verlauf von w_V zu machen. Ein sehr einfaches Resultat ergibt sich, wenn entsprechend (6)

$$w_V = C_V \sin \lambda x \cos n \varphi \quad (25)$$

gesetzt wird. Dieser Ansatz enthält natürlich eine gewisse Willkür. Als Haupteinwand wird man vorbringen können, daß nach (25) über die ganze Schale gleichmäßig verteilte Beulen angenommen werden, während es sich in Wirklichkeit um wenige, völlig unregelmäßig verteilte Vorbeulen handeln wird. Dabei ist jedoch zu bedenken, daß auch für den Durchschlagvorgang eine regelmäßig und in ganz bestimmter Weise verteilte Störverschiebung w_{st} vorausgesetzt ist, obwohl der wirkliche Vorgang sicherlich anders aussieht. Bei diesem wird das

Durchschlagen an irgendeiner Stelle der Schale beginnen und sich dann erst über die ganze Schale ausbreiten. Ein solcher in sehr kurzer Zeit ablaufender Vorgang ist aber kinetischer Natur und kann mit statischen Methoden nicht berechnet werden. Die bisherige Untersuchung muß also als statische Äquivalenz zum wirklichen kinetischen Prozeß aufgefaßt werden. Wenn man w_{st} in diesem Sinne versteht, ist w_v nach (25) ein angemessener Ansatz. Es folgt dann auch, daß für λ und n die beim Durchschlagen sich einstellenden Werte einzusetzen sind.

Mit (25) wird aus (24) eine inhomogene Differentialgleichung mit der Lösung

$$w = C \sin \lambda x \cos n \varphi.$$

Eingesetzt in (24) folgt unter Beachtung der Abkürzungen β und p^*

$$C [\beta (\lambda^2 + n^2)^4 + (1 - \mu^2) \lambda^4] = p^* \lambda^2 (\lambda^2 + n^2) (C_v + C)$$

und mit Rücksicht auf (7)

$$\frac{p}{p_K} = \frac{p_0}{p_K} \frac{C}{C_v + C}.$$

Fordert man nun, daß $p = p_{KD}$ wird, wenn $C = w_{st}$ ist, so wird

$$\frac{p_{KD}}{p_K} = \frac{p_0}{p_K} \frac{w_{st}}{C_v + w_{st}}.$$

Für p_0/p_K gilt dabei (12). Setzen wir jedoch dort als Beispiel die bei $p_{KD}/p_K = 0,4$ gültigen Werte für ζ und ν nach Abb. 4 ein, so wird $p_0/p_K = 1,023$. Im Rahmen der vorliegenden Abschätzung kann also ohne weiteres $p_0/p_K \approx 1$ gesetzt werden, so daß die einfache Formel

$$\frac{p_{KD}}{p_K} = \frac{w_{st}}{C_v + w_{st}} \quad (26)$$

folgt.

Als letztes ist C_v und damit die Höhe der Vorbeulen zu wählen. In der Stabstatik ist $1/400$ der Stützweite ein Durchschnittswert für die zulässige Durchbiegung, der dem bloßen Auge noch nicht auffällt. Auf eine Zylinderschale übertragen, würde man also mit Formfehlern zu rechnen haben, die $1/400$ des Durchmessers betragen, so daß

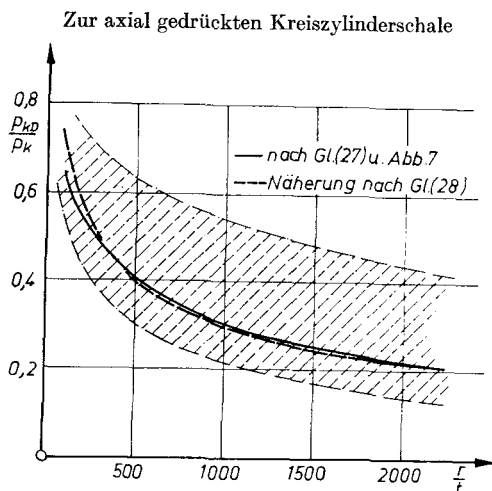
$$C_v = 5 \cdot 10^{-3} r$$

und nach (26)

$$\frac{p_{KD}}{p_K} = \frac{\frac{w_{st}}{t}}{5 \cdot 10^{-3} \frac{r}{t} + \frac{w_{st}}{t}} \quad (27)$$

zu setzen ist. Der bei Versuchen zu erwartende Streubereich dürfte etwa zwischen den Grenzen liegen, die sich für $C_v = 10^{-2} r$ und $C_v = 10^{-3} r$ ergeben.

Aus (27) folgt mit r/t als Parameter für p_{KD} als Funktion des vorhandenen w_{st} eine Kurvenschar, die mit der Kurve von Abb. 7, die p_{KD} in Abhängigkeit von



dem erforderlichen w_{st} darstellt, zum Schnitt gebracht werden kann. Die Schnittpunkte liefern für die gesuchten Durchschlagslasten einen Verlauf, der in Abb. 8 einschließlich des geschätzten Streubereichs dargestellt ist. p_{KD} läßt sich dabei in guter Näherung durch die für praktische Rechnungen geeignete Formel

$$\frac{p_{KD}}{p_K} = \frac{1}{\sqrt{1 + \frac{r}{100t}}} \quad (28)$$

wiedergeben, die dann zugleich eine sinnvolle Extrapolation für sehr kleine p_{KD}/p_K liefert, über die Abb. 8 nichts mehr aussagt.

Abb. 8 gilt für Gewichtsbelastung. Die entsprechenden Kurven für Belastung mit einer Prüfmaschine verlaufen nicht viel anders, auch wenn die Elastizität der Maschine noch geringer ist als oben angenommen. Die jeweils in Betracht kommenden Kurven können zum Vergleich mit Versuchsergebnissen benutzt werden und liefern dann eine gute Bestätigung der entwickelten Theorie*). Damit ist auch die Berechnung der Durchschlagslast in befriedigender Weise gelungen.

6. Zusammenfassung

Das schon häufig behandelte Problem der axial gedrückten Kreiszyinderschale wird zur Klärung der in der Einleitung formulierten noch offenen Fragen erneut aufgegriffen.

Ausgehend von den üblichen Grundgleichungen wird das *Galerkinsche* Verfahren mit einem Ansatz durchgeführt, der sich aus der Methode der schrittweisen Näherung gewinnen läßt und so möglichst wenig Willkür aufweist. Wellenlängenverhältnis und Beulenzahl werden nicht als Freiwerte für das

*) Dieser Vergleich soll, wie bereits erwähnt, in einer besonderen Arbeit erfolgen.

mathematische Näherungsverfahren verbraucht, sondern durch eine mechanische Hypothese festgelegt, nach der die kleinsten erforderlichen Störverschiebungen den Durchschlagvorgang einleiten. Es ergeben sich dabei zwanglos eine rautenförmige Beulfigur fast quadratischer Gestalt und eine Beulenzahl, die von der Höhe der Durchschlagslast abhängt und kleiner ist als die Beulenzahl der klassischen Stabilitätstheorie. Auf Grund einer den üblichen Vorschriften der Stabstatik entsprechenden Annahme über die Höhe von Vorbeulen folgt für die Durchschlagslast eine Abhängigkeit vom Verhältnis des Zylinder-radius zur Wandstärke.

Die entwickelte statische Theorie kann nicht den Anspruch erheben, den wirklichen Vorgang völlig richtig wiederzugeben, da dieser kinetischer Natur ist. Die gute Übereinstimmung mit Versuchsergebnissen zeigt jedoch, daß die aufgestellte Lösung ein brauchbares statisches Ersatzmodell beschreibt.

Literatur

- [1] *Th. v. Karman* — *H. S. Tsien*: J. Aeron. Sci. 8 (1941), S. 403.
- [2] *J. Kempner*: J. Aeron. Sci. 21 (1954), S. 329.
- [3] *A. S. Wolmir*: Biegsame Platten und Schalen, S. 335, Berlin 1962.
- [4] *L. H. Donnell*: ASME Transactions 56 (1934), S. 795.
- [5] *Th. v. Karman*: Enzykl. math. Wissensch. IV,4 (1907—1914), S. 350.
- [6] *W. Flügge*: Ing. Arch. 3 (1932), S. 463.
- [7] *S. Timoshenko*: Elastizitätstheorie, S. 392, St. Petersburg 1914.
- [8] *W. Thielemann* — *F. J. Heinrichsbauer*: Z. angew. Math. Mech. Bd. 41 (1961), S. T 112.
- [9] *A. Pflüger*: Stabilitätsprobleme der Elastostatik, 2. Aufl., Berlin — Göttingen — Heidelberg. In Vorbereitung.